$f \in \mathbb{R}[t]$

$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

① Für welches $f \in \mathbb{R}[t]$ ist $\tilde{f} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$?

② Für welches $f \in \mathbb{R}[t]$ ist $\tilde{f}$ ein Ringhomomorphismus?

③ Für welches $f \in \mathbb{R}[t]$ ist $\tilde{f}$ $\mathbb{R}$-linear?

| | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|
| (a) $f = 1$ | | $\tilde{f}(0) \neq 0$ | $\tilde{f}(0) \neq 0$ |
| (b) $f = t$ | $\rightsquigarrow \tilde{f} = \mathrm{id}$ | $\tilde{f} = \mathrm{id}$ | $\tilde{f} = \mathrm{id}$ |
| (c) $f = 0$ | | (✓)* | ✓ |
| (d) $f = 1 + t$ | | $\tilde{f}(0) \neq 0$ | $\tilde{f}(0) \neq 0$ |
| (e) $f = t^2$ | | ✗ | ✗ |
| (f) $f = 3t$ | | ✗ | ✓ |

*aber kein Homomorphismus von Ringen mit Eins

$f = a \cdot t$ $(a \in \mathbb{R})$

Das Polynom

$$f = t^5 - t^4 + 3t^2 + 9 \quad \in \mathbb{R}[t]$$

hat mindestens eine reelle Nullstelle

//

Das Polynom

$$g = t^5 - t^4 + 3t^2 \quad \in \mathbb{R}[t]$$

hat zwei verschiedene reelle Nullstellen.

$$\tilde{g}(0) = 0$$

$$g = \underset{\uparrow \atop 0}{t^2}\,\overbrace{\underbrace{\left(t^3 - t^2 + 3\right)}}^{q}$$

0 ist keine Nullstelle von q

Aber q hat eine Nullstelle.

---

$\exists$ Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$ mit

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$\vdots$

$f(99) = 0$

$f(100) = 1$ ?

---

Sei $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ $(\neq x_i\ \forall i)$, $y \in \mathbb{R}$

$\exists$ Polynom $f$:

$f(x_1) = 0$

$\vdots$

$f(x_n) = 0$

$f(x) = y$

---

$V$ VR, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ linear unabhängig bedeutet:

(a) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$ nur dann, wenn $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ✓

(b) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$, wenn $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ✗

(c) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$ für alle $\lambda_i \in K$. ✗

⟶ insbes. $1 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$,
also $\underline{v}_1 = \underline{0}$

$V$ VR, $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ linear unabhängig,
Es folgt:

(a) $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ linear unabhängig ✓

(b) $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ linear abhängig ✗

(c) kommt auf Einzelfall an ✗

Der Nullvektorraum $V = \{\underline{0}\}$

(a) hat keine Basis ✗

(b) hat Basis $(\underline{0})$ ✗

(c) hat Basis $\emptyset$ ✓

(d) ist gar kein VR ✗

$V = \emptyset$

(a) hat keine Basis ✗

(b) hat Basis $(\underline{0})$ ✗

(c) hat Basis $\emptyset$ ✗

(d) ist gar kein VR ✓

$V$ VR, $\left.\begin{array}{l} U \subset V \\ W \subset V \end{array}\right\}$ UVR

(a) $U + W = U \cup W$ ✗

(b) $U + W = \operatorname{span}(U \cup W)$ ✓

(c) $U + W = \operatorname{span}(U + W)$ ✓

(d) $U + W$ ✓

$$= \{ \underline{v} \in V \mid \exists\, k, \ell \in \mathbb{N},\ \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k \in U,\ \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell \in W,\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K,\ \mu_1, \dots, \mu_\ell \in K :$$

$$\underline{v} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{u}_i}_{=: \underline{u} \in U} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \underline{w}_j}_{=: \underline{w} \in W} \}$$

(e) $U + W$ ✓

$$= \{ \underline{v} \in V \mid \exists\, \underline{u} \in U,\ \underline{w} \in W : \underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \}$$